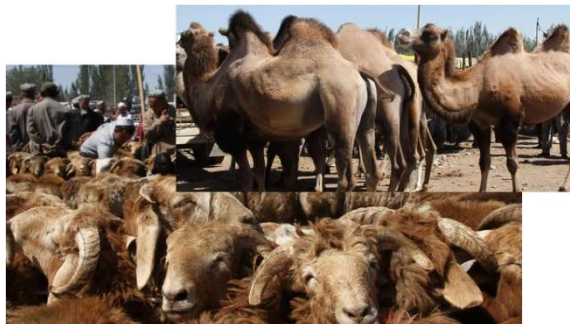


## Razões e proporções

Os números estão presentes na cultura humana já há muito tempo. Então é possível que certo dia, em algum lugar do Oriente alguém pode ter ouvido a seguinte negociação em língua local:

– *Dou-lhe dois camelos por cinco cabras.*

– *Isso é inaceitável, mas posso lhe dar três camelos por dez cabras.*



Nesse diálogo, tanto a proposta quanto a contraproposta exprimem relações exatas entre valores numéricos. A relação sugerida na proposta – dois camelos por cinco cabras – não pode exprimir o valor de um camelo em uma quantia inteira de cabras ou vice-versa. Ora, não cabe dizer que cada cabra custa 0,4 camelos nem que um camelo custa 2 cabras e meia, pois quem faria uma troca como essa? Já na contraproposta – três camelos por dez cabras –, o valor de cada cabra, expresso em quantidade de camelos, seria de 0,3 camelos, enquanto o valor unitário do camelo, expresso em quantidade de cabras, teria que ser representado por uma dízima periódica, ou seja, 3,333... cabras.

Muito antes de dominar as notações decimais dos números não inteiros, os antigos comerciantes foram capazes de interpretar certas relações existentes entre dois números inteiros e assim, estender o significado abstrato dos números criando os conceitos de razão e proporção numéricas.

Assim, entende-se que as quantidades de **cabras e camelos** equivalentes nessa troca comercial são proporcionais, respectivamente, à razão de **2 para 5** na proposta e à razão de **3 para 10** na contraproposta. Também se pode entender que as quantidades de **camelos e cabras** equivalentes são, respectivamente, proporcionais à razão de **5 para 2** na proposta e à razão de **10 para 3** na contraproposta.

Seriam então, os números inteiros, suficientes para se estabelecer as razões entre quaisquer quantidades? E no caso das medidas geométricas?

### As competências do Enem abordadas no estudo a seguir são

- Construir significados para os números racionais.
- Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.
- Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

### As habilidades do Enem abordadas no estudo a seguir são

- Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.
- Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.
- Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
- Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

## Razão

É muito comum que no estudo da matemática a palavra razão seja tomada como sinônimo de quociente. Porém a palavra razão possui muitos significados e, mesmo no estudo da matemática, pode ser usada para exprimir uma diferença, como por exemplo, em “Nos últimos anos, o PIB do país vem crescendo a uma razão de R\$ 200.000,00 por ano.”.

A palavra razão vem do latim *ratio* que significa, literalmente, o “raio de um círculo”. Entretanto, os romanos também usavam o termo *ratio* para traduzir do grego o termo *logos*, que era usado para designar todo e qualquer processo lógico da compreensão humana.

Ainda hoje, há termos jurídicos ditos em latim, como por exemplo: *ratio legis* (razão de ser da lei) e *ratio juris* (razão jurídica) em que o termo *ratio* é traduzido pela palavra **razão**. Nesses casos, o termo *razão* significa *motivo*: **Razão legal = Motivo legal**

Entretanto, em ditados populares, como “o cliente sempre tem razão”, o termo é usado para indicar que o cliente está sempre correto. Os significados da palavra razão também podem abranger as ideias de certeza, correção e raciocínio lógico.

Do latim “Ratio” também derivam os termos:

- Racional: (adjetivo) Coerente. Dotado de razão. Que possui coesão, inteligência. Que implica ponderação, bom senso.

- **Racionar:** (verbo intransitivo) Fazer raciocínios. Buscar a verdade com auxílio da razão. Procurar compreender as relações entre coisas e fatos. Calcular. Encadear argumentos e fazer deduções.
- **Raciocínio:** (substantivo) Concatenação de proposições deduzidas umas das outras para chegar a uma conclusão.
- **Racionamento:** (substantivo) Distribuição de quantidades medidas, limitadas. Divisão em partes.

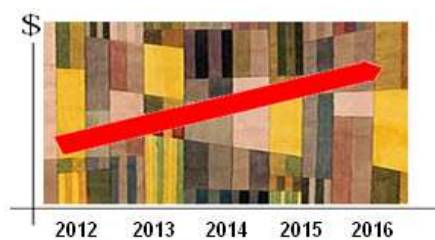
Desta forma temos que a palavra razão também serve para designar a operação aritmética da divisão.

No estudo da matemática, são chamados de **racionais** os números que podem ser expressos na forma de uma fração de termos inteiros. Como toda fração indica a divisão do seu numerador pelo seu denominador, temos que cada número racional em si é um **quociente** de dois inteiros. Por isso o uso da letra  $\mathbb{Q}$  para indicar o conjunto dos números **racionais**.

Além disso, no contexto matemático, a palavra razão pode indicar duas formas distintas de comparação de valores numéricos:

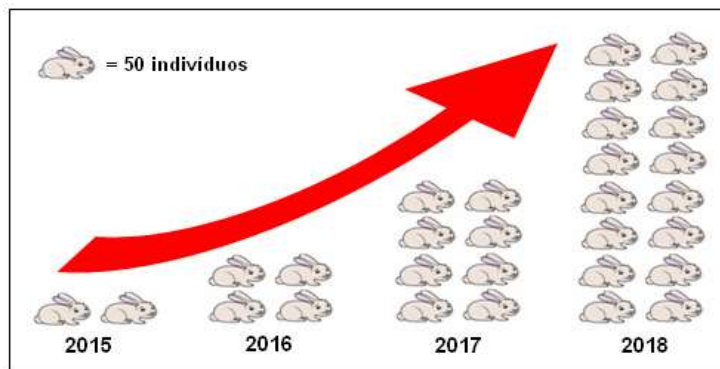
Uma dessas formas de comparação consiste em avaliar quanto um dos números excede o outro. Nesse caso, a razão dos valores comparados é obtida por meio da subtração.

**Exemplo 1:** Suponha que o valor atual de uma obra de arte seja de 10 mil reais e que esse valor aumente segundo uma razão de 2 mil reais a cada ano. Nesse caso, a sequência (10, 12, 14, 16, 18), que indica, em milhares de reais, os valores dessa obra de arte em um período de cinco anos, é uma progressão aritmética de **razão 2**.



A outra forma de comparação entre dois números avalia sua relação de multiplicidade que significa a quantidade de vezes que um dos valores cabe no outro, obtendo assim, a razão entre os valores comparados por meio da divisão. Este tipo de razão pode ser indicado por palavras como: “dobro”, “triplo”, “metade”, “terço” ou por expressões do tipo: “o quántuplo de”, “a quinta parte de” etc.

**Exemplo 2:** Suponha que, em certa região, a população atual de uma determinada espécie seja de 100 indivíduos e que essa população duplique a cada ano. Nesse caso, a sequência (100, 200, 400, 800), que indica o número de indivíduos dessa população no período de quatro anos, é uma progressão geométrica de **razão 2**.



A terminologia matemática faz uso da palavra *razão* principalmente como sinônimo de quociente, ou seja, para designar o resultado de uma divisão. Uma exceção é feita, por exemplo, no estudo das progressões aritméticas em que a palavra *razão* significa a diferença entre dois termos consecutivos.

Veja, a seguir, trechos de alguns enunciados de questões das provas de Matemática e suas Tecnologias e de outras áreas do conhecimento do Enem, nos quais está presente a palavra *razão*:

1. “A razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor é:”  
(ENEM 2013 prova de matemática)
2. “Para Platão, o que havia de verdadeiro em Parmênides era que o objeto de conhecimento é um objeto de **razão** e não de sensação...”  
(Enem 2012 prova de matemática)
3. “A eficiência das lâmpadas pode ser comparada utilizando a **razão**, considerada linear, entre a quantidade de luz produzida e o consumo. ...”  
(Enem 2012 prova de ciências da natureza)
4. “... sofreram transformações em seus princípios filosóficos em **razão** de sua disseminação pelo mundo.”  
(Enem 2011 – prova de linguagens)
5. “... Considerando-se os chuveiros de modelos A e B, funcionando à mesma potência de 4400 W, a razão entre as suas respectivas resistências elétricas,  $R_A$  e  $R_B$ , ...”  
(ENEM 2011 – prova de ciências da natureza)
6. “... Qual a **razão** entre o diâmetro aproximado do olho humano, suposto pela professora, e o diâmetro do espelho primário do telescópio citado?”  
(Enem 2010 – prova de matemática)
7. “...A eficiência de um processo de conversão de energia é definida como a **razão** entre a produção de energia ou trabalho útil e o total de entrada de energia no processo.”  
(ENEM 2009 – prova de ciências humanas)

## Razão simples

As razões simples são numerais que resultam da comparação entre grandezas de mesma unidade. Se esta comparação for feita por meio de subtração, então o valor comparativo é chamado de variação e tem a mesma unidade das grandezas comparadas. As variações de grandezas de mesma espécie costumam ser indicadas com o símbolo  $\Delta$ . Mas, se a comparação for feita por meio da divisão, então o resultado comparativo é adimensional, pois indica apenas a relação de multiplicidade entre os valores comparados.

Para exemplificar as razões de comparação por meio de subtrações, considere o texto a seguir:

**Exemplo 3:** *A população atual do planeta já atingiu a marca dos 7 bilhões e continua crescendo. Segundo a ONU, para obter reequilíbrio entre índices de natalidade e mortalidade, a média mundial de filhos por mulher teria de baixar de 2,5 para 2,1. Se isso acontecer, a estabilização demográfica será alcançada somente no século XXII, quando a população do planeta atingirá a marca de 10 bilhões de pessoas.*

As informações fornecidas neste parágrafo permitem responder às seguintes perguntas:

a) Qual é o aumento estimado da população mundial até que se atinja a estabilização demográfica?

Para responder a essa pergunta, deve-se calcular a diferença entre a estimativa dada para a população mundial no século XXII e a população atual. Assim, sendo  $x_F = 10$  bilhões a estimativa e  $x_I = 7$  bilhões a atual, temos:

$$\Delta x = x_F - x_I = 10 \text{ bilhões} - 7 \text{ bilhões} = 3 \text{ bilhões}$$

Portanto, o aumento estimado da população mundial é de 3 bilhões de habitantes.

b) Quanto deve ser a variação da média de filhos por mulher necessária para reequilibrar os índices de natalidade e mortalidade?

Para responder a essa pergunta, deve-se calcular a diferença entre as duas médias mundiais de filhos por mulher. Assim, sendo  $y_A = 2,5$  a atual e  $y_B = 2,1$  a de reequilíbrio, temos:

$$\Delta y = y_B - y_A = 2,1 - 2,5 = -0,4$$

Portanto, a média deve diminuir de 0,4 unidades (filhos por mulher).

**Exemplo 3:** Para entender as razões de comparação por meio de quociente, considere a seguinte tabela de preços:



As informações fornecidas pela tabela permitem responder à seguinte pergunta: Quantos barris podiam ser adquiridos em 1973 pelo preço de um único barril em 2013?

Para responder a essa pergunta, basta calcular o quociente entre o preço em 2013 e o preço em 1973, mas como essa razão não é expressa por um número inteiro, pois  $\frac{100}{3} = 33,333\dots$ , é comum que se dê como resposta um valor inteiro aproximado, ou seja: 33 barris.

Em provas de diversas áreas do conhecimento, como matemática, física e química, comparações por razões simples são muito solicitadas e é bastante comum que sejam dadas informações sobre as quantidades de vezes que certas grandezas contêm outras de mesma espécie, e se questione a respeito.

Para exemplificar essa situação vamos resolver e discutir a seguinte questão.

**Questão do Enem 2010** – A disparidade de volume entre os planetas é tão grande que seria possível colocá-los uns dentro dos outros. O planeta Mercúrio é o menor de todos. Marte é o segundo menor: dentro dele cabem três Mercúrios. Terra é o único com vida: dentro dela cabem sete Martes. Netuno é o quarto maior: dentro dele cabem 58 Terras. Júpiter é o maior dos planetas: dentro dele cabem 23 Netunos.

Revista Veja. Ano 41, nº 25, 25 jun. 2008 (adaptado).

Seguindo o raciocínio proposto, quantas Terras cabem dentro de Júpiter?

- a) 406
- b) 1.334
- c) 4.002
- d) 9.338
- e) 28.014

Do ponto de vista geométrico, as informações apresentadas são razões entre os volumes de alguns planetas, e o que se solicita é uma outra razão simples entre as grandezas desses volumes, afinal, não seria, fisicamente, possível colocar um planeta dentro do outro! Veja, a seguir, um processo para a interpretação matemática e resolução da questão.

Como nenhum volume é fornecido explicitamente, uma modelagem algébrica é recomendável: partindo-se de atribuições literais para representar os volumes dos planetas Mercúrio, Terra, Marte, Júpiter e Netuno pelas siglas Me, Te, Ma, Ju e Ne, respectivamente, pode-se expressar, em linguagem matemática, cada razão mencionada no enunciado:

- “Marte é o segundo menor: dentro dele cabem três Mercúrios”:  $\frac{Ma}{Me} = 3$ ;
- “Terra é o único com vida: dentro dela cabem sete Martes”:  $\frac{Te}{Ma} = 7$ ;
- “Netuno é o quarto maior: dentro dele cabem 58 Terras”:  $\frac{Ne}{Te} = 58$ ;
- “Júpiter é o maior dos planetas: dentro dele cabem 23 Netunos”:  $\frac{Ju}{Ne} = 23$ .

Agora, basta observar qual é a razão solicitada: “quantas Terras cabem dentro de Júpiter?”, ou seja, o valor da razão  $\frac{Ju}{Te}$ . Perceba que só há a necessidade de se analisar as razões  $\frac{Ne}{Te}$  e  $\frac{Ju}{Ne}$ , pois quando multiplicadas, ocorre o “cancelamento” do volume do planeta Netuno:

$$\frac{\cancel{Ne}}{Te} \cdot \frac{Ju}{\cancel{Ne}} = \frac{Ju}{Te}$$

Logo,  $\frac{Ju}{Te} = 58 \cdot 23 = 1.334$  (Alternativa B).

### **Argumentos consistentes**

As relações matemáticas de ordem crescente e decrescente permitem construir argumentos consistentes com extrema eficiência. Por isso, são muito usadas em questões de múltipla escolha.

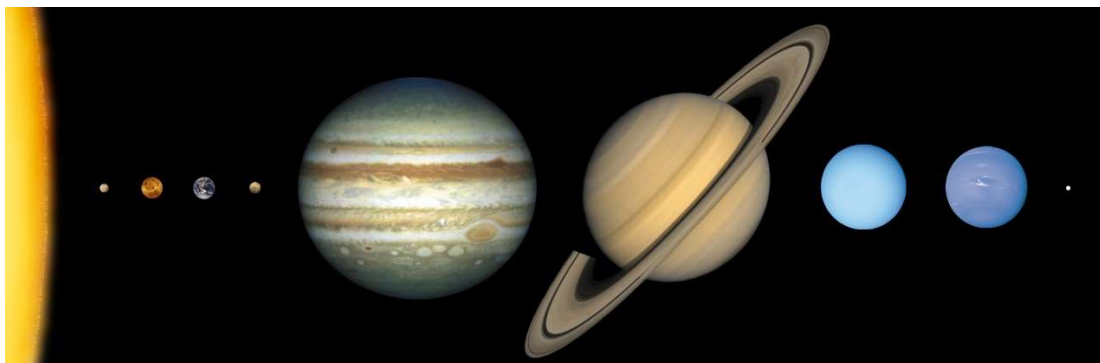
Do ponto de vista lógico, um argumento deve ser considerado consistente não por ser verdadeiro, mas, sim, por estar de acordo com as informações dadas pelo enunciado

mesmo que elas sejam falsas. Além disso, há margens do bom senso para aproximações numéricas.

Observando o *Exercício resolvido* anterior e que a razão entre os números 23 e 7 está próxima de 3, já que  $\frac{23}{7} = 3,285714$ , pode-se considerar um argumento consistente a afirmação de que: “*Cabem três vezes mais Netunos em Júpiter do que Martes na Terra.*”. Ou seja, naquela questão, as relações de ordem “menor que <” e “maior que >” aplicadas aos valores das razões entre os volumes dos planetas geraram argumentos consistentes como:

### **Cabem mais Netunos em Júpiter do que Martes na Terra.**

Isto se justifica, pois, se  $\frac{Te}{Ma} = 7$  e  $\frac{Ju}{Ne} = 23$  são dados corretos, como  $23 > 7$  também é, então a afirmação deve ser considerada um argumento consistente.



### **Razão composta**

Quando são comparados, por meio de quociente, dois numerais que indicam quantidades de espécies diferentes, o valor comparativo obtido não indica uma razão de multiplicidade. Razões como essas geram grandezas compostas e toda razão composta deve vir acompanhada de suas unidades específicas, muitas vezes designadas em palavras em uma forma de texto do tipo:

**“espécie 1 por espécie 2”**

### **Taxas periódicas e concentrações**

Algumas razões compostas são interpretadas como taxas médias de variação por unidade de tempo, conhecidas como taxas periódicas, e outras como concentrações médias por unidade de espaço.



**Exemplo 5:** Para entender uma razão composta periódica, considere novamente a seguinte tabela:

Ano	Preço do barril de petróleo
1973	US\$ 3.00
2013	US\$ 100.00

Observe que as grandezas relacionadas nessa tabela são de espécies diferentes: temporal e monetária.

- As grandezas temporais são as datas, em anos:

$$x_1 = 1973 \text{ e } x_2 = 2013.$$

- A variação de grandeza temporal é um período, em anos:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 2013 - 1973 = 40 \text{ anos}$$

- As grandezas monetárias são os preços, em dólares:

$$y_1 = 3 \text{ e } y_2 = 100$$

- A variação de grandeza monetária é um aumento, em dólares:

$$\Delta y = y_2 - y_1 = 100 - 3 = 97 \text{ dólares.}$$

A partir das variações de grandezas temporal e monetária, pode-se obter uma grandeza composta por quociente, que indica a taxa média de variação anual do preço do barril de petróleo, em dólares:

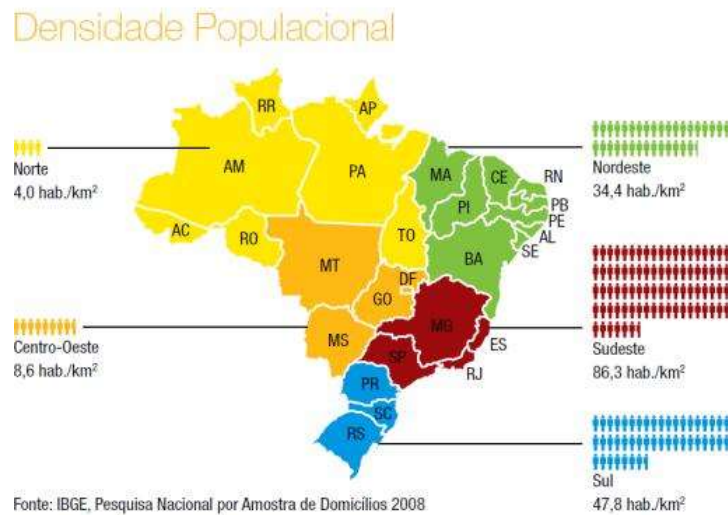
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{97 \text{ dólares}}{40 \text{ anos}} = 2,425 \text{ dólares / ano}$$

É importante observar que a taxa periódica encontrada no exemplo anterior é apenas uma média, o que não significa, necessariamente, que o aumento ocorreu da mesma forma em cada ano.

**Exemplo 6:** Outro exemplo de grandeza composta por quociente é a densidade demográfica. Trata-se de uma grandeza relativa ao espaço e não ao tempo. Por isso, não exprime algo periódico, mas, sim, uma concentração. Nesse caso, de pessoas por unidade de área.

Para se obter a densidade demográfica de uma região, basta que se efetue a divisão do número de habitantes do local pela sua área, normalmente em quilômetros quadrados. Assim, como, segundo o IBGE, em 2014, o Brasil possuía pouco mais de 202 milhões

de habitantes e o território brasileiro estende-se por, aproximadamente, 8,5 milhões de quilômetros quadrados, basta que se efetue a divisão de 202 por 8,5, para se concluir que a densidade demográfica do Brasil, em 2013, era de, aproximadamente, 23,8 habitantes por km<sup>2</sup>.



## Proporção

Proporção é o nome dado a toda relação de igualdade entre duas razões. As sentenças do tipo

$$a : b = c : d$$

são proporções que podem ser lidas como “a razão de **a** para **b** é igual à razão de **c** para **d**” ou simplesmente “**a** está para **b** como **c** está para **d**”.

Do ponto de vista aritmético, proporções como essa informam que as divisões de **a** por **b** e de **c** por **d** geram o mesmo quociente **q**, ou seja,

$$q = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

## Nomenclatura

Como cada razão é formada por dois termos, **antecedente** (numerador) e **consequente** (denominador), toda proporção fica formada por quatro termos, sendo que o antecedente da primeira razão e o consequente da segunda são chamados de termos **extremos** e os demais são chamados de termos **médios**.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \begin{cases} a \text{ (1º termo): antecedente da 1ª razão;} \\ b \text{ (2º termo): consequente da 1ª razão;} \\ c \text{ (3º termo): antecedente da 2ª razão;} \\ d \text{ (4º termo): consequente da 2ª razão.} \end{cases}$$

## Propriedades algébricas das proporções

- **Produto cruzado:** O produto dos termos extremos é igual ao produto dos termos médios.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = c \cdot b$$

- **Simplificação:** Pode-se dividir ambos os antecedentes ou ambos os consequentes por um mesmo número real não nulo.

$$\frac{\cancel{a}}{b} = \frac{\cancel{c}}{d} \Leftrightarrow \frac{a \div n}{b} = \frac{c \div n}{d}$$
$$\frac{a}{\cancel{b}} = \frac{c}{\cancel{d}} \Leftrightarrow \frac{a}{b \div n} = \frac{c}{d \div n}$$

- **Proporções equivalentes:** Há oito maneiras de se representar uma mesma proporção.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$
$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$$
$$a \cdot d = b \cdot c$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{d}{b} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

- **Nova razão:** A razão entre a soma dos antecedentes e a dos consequentes de uma proporção é equivalente às razões que compõem essa proporção.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

- **Nova proporção:** De uma proporção original, substituem-se ambos os antecedentes, ou ambos os consequentes, pela soma dos termos de suas respectivas razões.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$

## Grandezas proporcionais

Vimos, até aqui, que proporção é uma igualdade entre duas razões, ou seja, são dois quocientes de origens distintas que devem produzir o mesmo resultado real. Por isso, os termos usados para exprimir razões como: “dobro”, “metade”, “quíntuplo” ou “quinta parte” podem ser também usados para expressar a proporcionalidade entre duas grandezas.

Se, por exemplo, quando o valor de uma grandeza duplica, o da outra relacionada também duplica, ou, então, quando o de uma quintuplica, o da outra também quintuplica e, assim, por diante, dizemos que essas duas **grandezas são diretamente proporcionais** (GDP). Já, se quando o valor de uma delas duplica, o da outra cai pela metade, ou, então, quando o de uma quintuplica, o da outra cai para a quinta parte, e, assim, por diante, dizemos que essas duas **grandezas são inversamente proporcionais** (GIP).

Observe o exemplo da idade de um pai que aumenta enquanto a idade de seu filho também aumenta. Repare que o crescimento simultâneo de grandezas não significa, necessariamente, um crescimento proporcional, visto que, nesse exemplo, isso não acontece proporcionalmente, pois, no período necessário para que a idade da criança duplique, não é, necessariamente, suficiente para que a idade de seu pai também duplique.

Da mesma forma, o simples crescimento de uma grandeza que acarreta uma queda nos valores de outra, não é, necessariamente, suficiente para se caracterizar crescimentos de proporção inversa. Se, por exemplo, alguém sair de casa com R\$ 400,00, levando parte desse dinheiro nos bolsos e a outra parte em sua carteira, então, sempre que essa pessoa tirar dinheiro da carteira e colocá-lo nos bolsos, a quantidade de dinheiro da carteira diminui e a dos bolsos aumenta, mas isso não acontece de forma proporcional.

## Grandezas diretamente proporcionais (GDP)

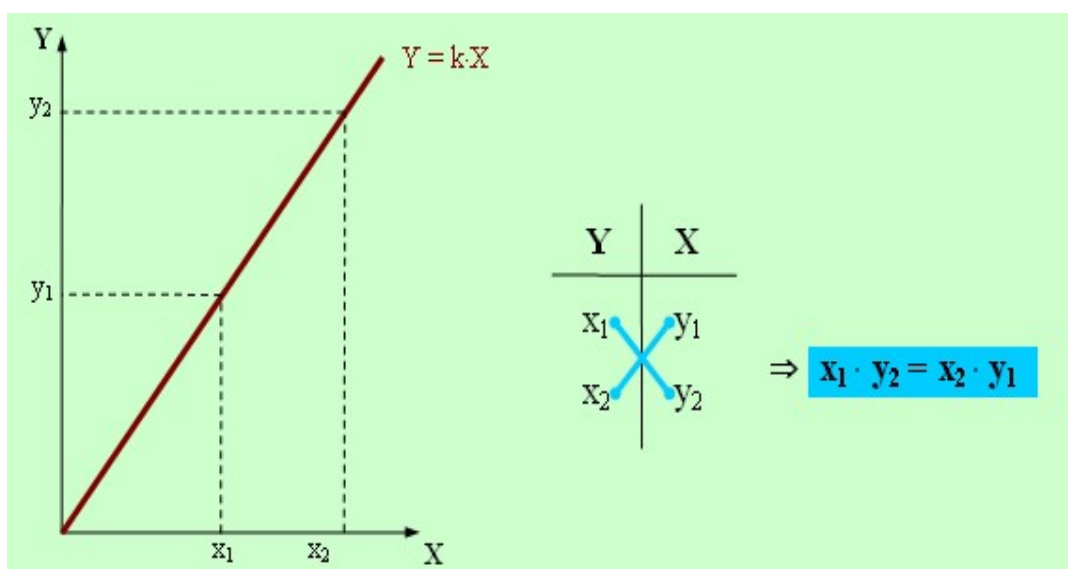
No estudo sobre os valores de duas grandezas distintas, X e Y, envolvidas em um mesmo fenômeno, afirma-se que X e Y são grandezas diretamente proporcionais sempre que houver, entre elas, uma relação do tipo:  $\frac{Y}{X} = k$ , em que o número k é a constante de proporcionalidade.

A unidade e o significado da constante de proporcionalidade dependem das unidades e significados das grandezas X e Y. Do ponto de vista algébrico, essas constantes de

proporcionalidade podem ser interpretadas como coeficientes de funções lineares. Observe:

$$\frac{Y}{X} = k \Rightarrow Y = k \cdot X$$

Os gráficos das funções lineares são representados por retas que, necessariamente, passam pela origem do sistema cartesiano. Dessa forma, a constante  $k$  pode ser comparada ao valor da tangente do ângulo de inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas (Ox). Além disso, as funções lineares obedecem à **regra de três simples e direta**, que diz ser constante o produto cruzado entre os elementos de dois pares ordenados  $(x, y)$ .



No estudo da geometria, por exemplo, o comprimento de uma circunferência é diretamente proporcional ao comprimento de seu diâmetro, e a constante que estabelece esta relação de proporcionalidade é indicada pelo número  $\pi$ . Assim, estando os comprimentos da circunferência e do diâmetro em uma mesma unidade de medida, tem-se:

$$[\text{circunferência}] = \pi \cdot [\text{diâmetro}]$$

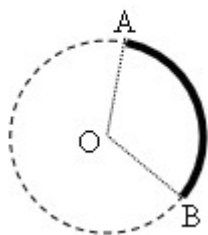
Como o comprimento do diâmetro de uma circunferência mede a dobro de seu raio, essa relação pode ser expressa por:

$$[\text{circunferência}] = 2 \cdot \pi \cdot [\text{raio}]$$

Vejamos, agora, o que ocorre com os arcos de uma circunferência:

O comprimento de um arco de circunferência é diretamente proporcional a duas outras grandezas: a medida do ângulo central e o comprimento do raio da circunferência que contém o arco. Sendo assim e considerando as menores medidas de arco e de ângulo central, tem-se:

$$[\text{comp}(\widehat{AB})] = k \cdot [\text{med}(A\hat{O}B)] \cdot [\text{raio}]$$



Se, tanto o comprimento do arco, quanto o do raio estiverem na mesma unidade e a medida do ângulo estiver expressa, em graus, teremos:  $k = \frac{\pi}{180^\circ}$

**Exemplo 7:** O comprimento, em metros, de um arco de  $40^\circ$  em uma circunferência de 6 metros de raio é, numericamente, expresso por:

$$\frac{\pi}{180^\circ} \cdot 40^\circ \cdot 6 = \frac{4\pi}{3} \approx 4,2$$

Ou seja, aproximadamente, 4,2 metros.

### **Grandezas cujas variações são diretamente proporcionais (GVDP)**

A variação de uma grandeza também é representada pela letra grega  $\Delta$  (delta maiúsculo). Assim, quando uma grandeza  $x$  varia de um valor inicial,  $x_1$ , para um valor final,  $x_2$ , indicamos essa variação por

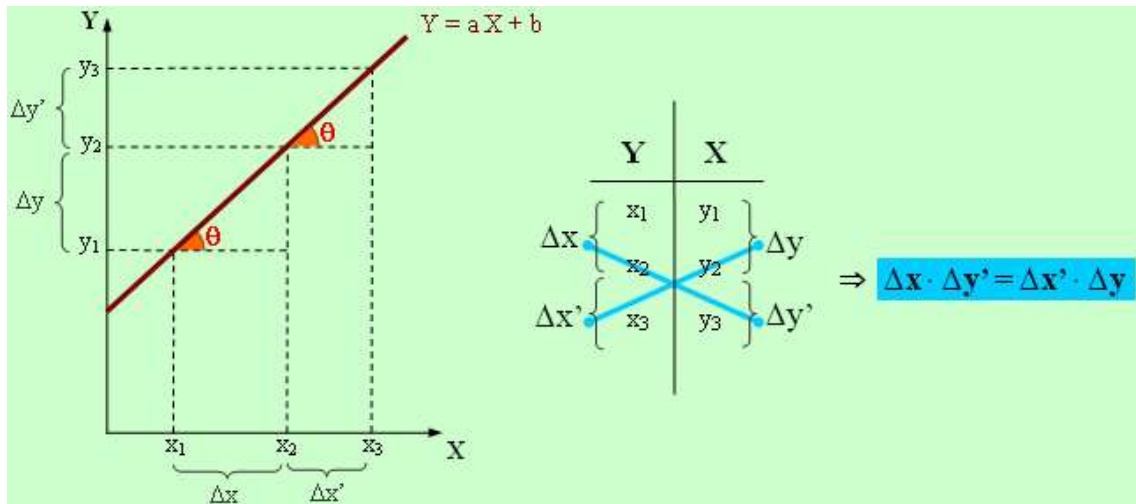
$$\Delta x = x_2 - x_1,$$

que representa a diferença entre o valor final e o valor inicial da grandeza  $x$  durante essa variação.

Os gráficos das funções que relacionam duas grandezas que têm variações proporcionais são representados por retas que podem não conter a origem do sistema cartesiano. Isso acontece com as funções de primeiro grau do tipo:

$$y = ax + b, \text{ em que } a \neq 0 \text{ e } b \neq 0.$$

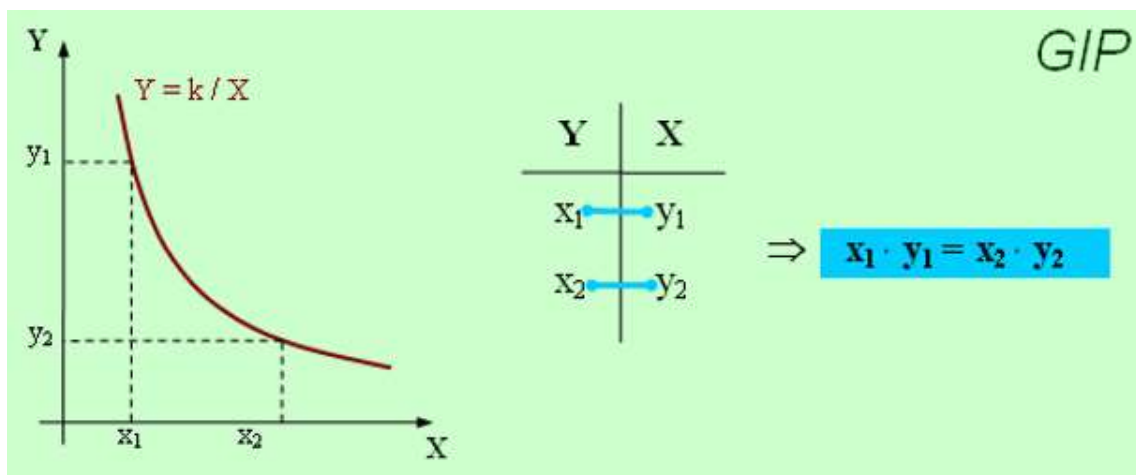
Nestes casos, a regra de três simples pode ser aplicada apenas às variações das grandezas.



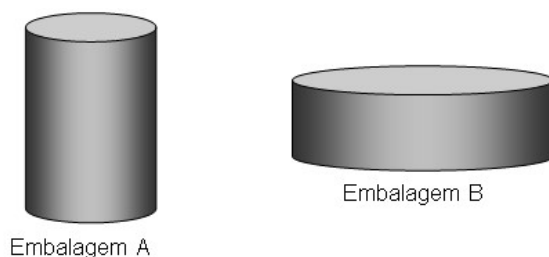
### Grandezas inversamente proporcionais (GIP)

Afirma-se que X e Y são grandezas inversamente proporcionais quando houver, entre elas, uma relação do tipo:  $Y \cdot X = k$ , em que a constante de proporcionalidade  $k$  é diferente de zero, o que exclui a possibilidade de que alguma das grandezas relacionadas seja nula. Sendo assim, tem-se:  $Y = \frac{k}{X}$

Os gráficos das funções desse tipo são representados por um ramo de hipérbole e, neste caso, a **regra de três simples e inversa** afirma ser constante o produto direto das informações de um mesmo par ordenado (x, y).



Em relação às aplicações geométricas da proporcionalidade inversa, considere que uma determinada empresa produza embalagens cilíndricas de mesma capacidade, mas com diferentes proporções entre a área da base e a medida da altura. Nessa situação, as grandezas envolvidas são inversamente proporcionais, assim se duas embalagens A e B são tais que a embalagem A tem o dobro a altura da embalagem B, então a área da base da embalagem A deve ser igual à metade da área da base da embalagem B.



### Abordagem algébrica da regra de três composta

- Se uma grandeza A diretamente proporcional à grandeza B, então:

$$A = k_1 \cdot B, \quad k_1 > 0$$

- Se uma grandeza A inversamente proporcional à grandeza C, então:

$$A = k_2 \cdot \frac{1}{C}, \quad k_2 > 0$$

- Se uma grandeza A diretamente proporcional à grandeza B e inversamente proporcional à grandeza C, então:

$$A = k_3 \cdot \frac{B}{C}, \quad k_3 > 0$$

- Se uma grandeza A diretamente proporcional às grandezas B e C, então:

$$A = k_4 \cdot B \cdot C, \quad k_4 > 0$$

- Se uma grandeza A inversamente proporcional às grandezas B, C e D, então:

$$A = k_5 \cdot \frac{1}{B \cdot C \cdot D}, \quad k_5 > 0$$

- Se uma grandeza Y diretamente proporcional às grandezas M e N e inversamente proporcional às grandezas P, Q e R, então:

$$Y = k \cdot \frac{M \cdot N}{P \cdot Q \cdot R}, \quad k > 0$$

Além das grandezas envolvidas no estudo da proporcionalidade, sempre há um número real  $k$ , chamado de constante de proporcionalidade que serve para relacionar adequadamente os valores dessas grandezas em uma determinada expressão algébrica

O modelo matemático de análise das variações de grandezas proporcionais, estudado nesse capítulo, é de fato um dos mais aplicados pelas demais ciências exatas como a Física ou a Química, por exemplo. Mas, esse modelo também pode ser útil em situações mais prosaicas como a de criar galinhas.



Imagine que o dono de uma pequena granja deva comprar ração periodicamente para alimentar suas galinhas adultas.

O número de galinhas adultas em uma granja é variável. Esse número pode aumentar, pois em algum momento as jovens galinhas tornam-se adultas, mas também pode diminuir, uma vez que as galinhas adultas serão abatidas ou vendidas.

A quantidade de ração comprada também pode variar em cada pedido de acordo com a vontade do granjeiro ou a disponibilidade para entrega de seus fornecedores.

Assim, o tempo entre uma compra e outra deve oscilar de acordo com as variações das quantidades de galinhas e ração comprada.

Embora seja bastante comum supor que as grandezas envolvidas nessa situação tenham relação de proporcionalidade, o método científico recomenda que essa suposição seja verificada antes da aplicação do modelo matemático. Então, imagine agora que o dono dessa granja fez uma tabela comparando as três grandezas envolvidas para testar a hipótese da proporcionalidade:

<b>Número de galinhas adultas</b>	<b>Quantidade de ração comprada</b>	<b>Tempo de duração da ração comprada</b>
60	120 kg	24 dias
60	180 kg	36 dias
60	80 kg	16 dias
90	120 kg	16 dias
90	60 kg	8 dias
45	60 kg	16 dias

Para verificar a relação de proporcionalidade entre duas dessas três grandezas, basta observar um par de linhas da tabela que apresentem o mesmo valor para a terceira grandeza envolvida. Assim:

1. Verifica-se a relação de proporcionalidade entre o número de galinhas adultas e a quantidade de ração comprada, observando-se duas linhas da tabela com o mesmo valor para o tempo de duração da ração comprada.

2. Verifica-se a relação de proporcionalidade entre o número de galinhas adultas e o tempo de duração da ração comprada, observando-se duas linhas da tabela com o mesmo valor para a quantidade de ração comprada.
3. Verifica-se a relação de proporcionalidade entre a quantidade de ração comprada e o tempo de duração da ração comprada, observando-se duas linhas da tabela com o mesmo valor para o número de galinhas adultas.

Se as grandezas envolvidas no problema estabelecerem de fato alguma relação de proporcionalidade, então essa relação poderá ser verificada observando-se qualquer par de linhas da tabela que tenham um mesmo valor para uma das grandezas envolvidas.

As duas primeiras linhas dessa tabela mostram, por exemplo, que com o mesmo número de galinhas, as quantidades de ração comprada e seus respectivos tempos de duração são diretamente proporcionais, pois tanto os números 120 e 180 quanto os números 24

e 36 estão na razão de 2 para 3:  $\frac{120}{180} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$ .

Essa mesma relação de proporcionalidade pode ser observada comparando-se a quarta e a quinta linha da tabela, pois elas mostram que com um mesmo número de galinhas, o tempo de duração da ração comprada cai pela metade quando a quantidade de ração comprada também cai pela metade.

As duas últimas linhas dessa tabela mostram que o número de galinhas adultas na criação e o tempo de duração da ração comprada são grandezas inversamente proporcionais, pois com a mesma quantidade de ração comprada, o tempo de duração da ração comprada duplica quando o número de galinhas cai pela metade.

Assim, sendo:

- $N$  = número de galinhas adultas na criação
- $R$  = quantidade de ração comprada
- $\Delta t$  = tempo de duração da ração comprada

Temos que:

- $\Delta t$  e  $N$  são grandezas inversamente proporcionais.
- $\Delta t$  e  $R$  são grandezas diretamente proporcionais.

Então, existe uma constante de proporcionalidade  $k$  positiva tal que:  $\Delta t = k \cdot \frac{R}{N}$ .

Agora, basta escolher uma linha qualquer da tabela para se obter o valor de k. Então, dos valores apresentados pela primeira linha da tabela temos que:

$$24 = k \cdot \frac{120}{60} \Leftrightarrow k = 12.$$



Feito isso, o dono da granja obtém a fórmula  $\Delta t = 12 \cdot \frac{R}{N}$ , que pode ser verificada em cada linha da tabela, mas que também serve para prever o tempo de duração da ração comprada de acordo com a quantidade comprada e o número de galinhas adultas na granja. Assim, por exemplo, se o houver 50 galinhas adultas na granja ( $N = 50$ ) e apenas 100 kg de ração disponível no estoque ( $R = 100$ ), essa ração se esgotará em:

$$\Delta t = 12 \cdot \frac{R}{N} = 12 \cdot \frac{100}{50} = 12 \cdot \frac{100}{50} = 12 \cdot 2 = 24 \text{ dias}$$

Com essa previsão, o granjeiro pode se preparar melhor, do ponto de vista financeiro, para suas próximas compras, por exemplo.

### **Aplicando proporções compostas nas ciências da natureza**

No estudo da Química há uma importante relação de proporcionalidade entre as grandezas associadas aos gases ideais: a pressão que um desses gases exerce no recipiente que o contém é diretamente proporcional a sua temperatura absoluta e a sua quantidade de matéria dentro do recipiente, mas é inversamente proporcional ao volume que ocupa, ou seja:

$$[\text{pressão}] = k \cdot \frac{[\text{quantidade de matéria}] \cdot [\text{temperatura}]}{[\text{volume}]}$$

A expressão utilizada, em Física, para se calcular a velocidade média,  $v$ , de um corpo em movimento é

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

sendo  $\Delta S$  o deslocamento do corpo e  $\Delta t$  o intervalo de tempo em que esse deslocamento acontece. Observe que, nesta expressão, temos a constante de proporcionalidade sendo  $k = 1$ , mas isso só acontece se a unidade de medida da velocidade média estiver de acordo com as unidades em que foram medidos o deslocamento e o intervalo de tempo.

Do ponto de vista da matemática, estamos mais preocupados com a obtenção dos numerais que indicam corretamente medidas de grandezas, do que com a adequação das unidades químicas e físicas. Por isso, para expressar as relações algébricas, sem a preocupação com esta adequação de unidades, há uma notação particular das equações, que se usa de palavras ou abreviações escritas entre colchetes nos lugares dos termos algébricos, como foi feito anteriormente nos exemplos da geometria e da química. Com esta notação particular, pode-se, por exemplo, relacionar a velocidade média, em quilômetros por hora, o deslocamento, em metros, e o intervalo de tempo, em segundos, com a expressão:

$$[\text{velocidade média}] = 3,6 \cdot \frac{[\text{deslocamento}]}{[\text{intervalo de tempo}]}$$