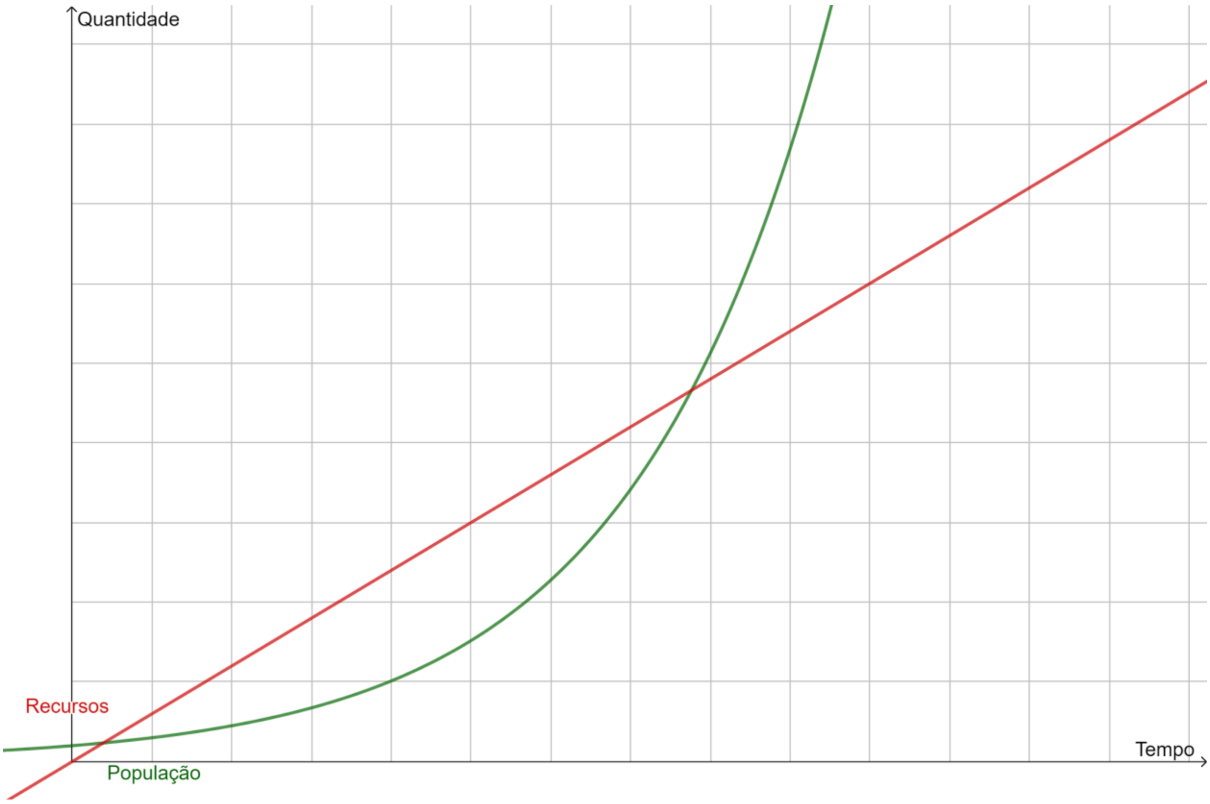
ALIMENTAÇÃO

Fala ai, galera! Dessa vez, vamos falar sobre alimentação e as suas relações com a população.
Essa preocupação com as questões de alimentação não é novidade e sempre esteve relacionada a pautas demográficas percebendo que a alimentação é fator crítico quando avaliamos o crescimento populacional.

Na época da revolução industrial, período de grandes mudanças nos estilos de vida e trabalho, um economista chamado Thomas Malthus, começou a estudar o crescimento da população e relacionar com a produção agrícola da época.

Ele chegou na conclusão de que haveria uma crise de alimentos, porque a população estava crescendo como uma progressão geométrica e a produção agrícola crescia em uma progressão aritmética. Isso quer dizer que, a população estava crescendo mais rapidamente que a produção de alimento que sustenta essas pessoas, de modo que, chegará um momento em que haverá muitas pessoas e a produção agrícola não dará conta de alimentar toda essa população.

No gráfico podemos observar, que a partir do ponto de encontro, a população, representada pela curva em verde, tem uma quantidade muito maior do que a produção, em vermelho.



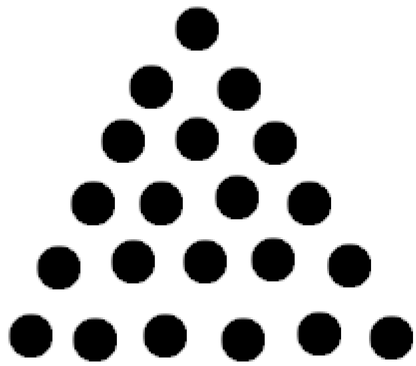
Essa teoria demográfica de Malthus foi criticada por ter avaliado apenas uma população local e predominantemente rural, situação que mudaria com a revolução industrial pelo fato do êxodo rural, fato ocasionado pela grande oferta de trabalho nos centros urbanos devido as demanda das fábricas, que só aumentavam.
Para poder controlar a população, Malthus, por ter caráter religioso, via que era necessário que as camadas mais pobres da população tivessem sua reprodução controlada por abstinência sexual e costumes de casamento tardio. Ele era contra políticas de assistencialismo, já que elas têm como objetivo garantir o mínimo para a sobrevivência e a morte pela miséria seria um controlador demográfico. E foi por essas conclusões que a teoria demográfica Malthusiana fois considerada por muitos cruel e pessimista, já que ele pensava que a raça humana estava fadada a miséria.

Agora, saindo um pouco do ponto de vista histórico e vendo pelo lado matemático dessa teoria, o que é progressão aritmética e progressão geométrica ?

> *progressão*
> *s.f.*
> *ação de progredir; progresso.*
> *desenvolvimento gradual (de um processo); sucessão.*

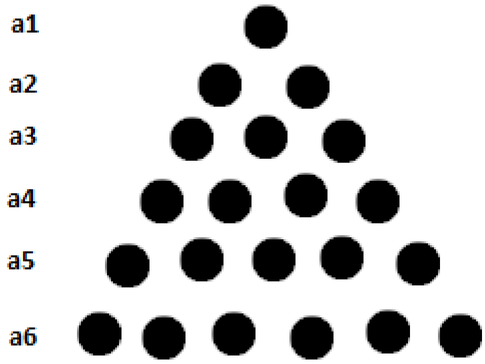
Pensando na segunda definição da palavra progressão, podemos chegar na conclusão matemática do termo. As progressões são tipos de sequências de números bem determinada por um ponto inicial, por um algum tipo de incremento e o número de incrementos que serão feitos.

Progressão Aritmética (P.A.)



Observando a imagem acima, você consegue ver algum tipo de progressão? Consegue perceber que se olharmos em linhas, de cima para baixo, a cada linha que se passa, aumentamos uma bolinha? Esse tipo de comportamento que vai somando uma determinada parcela a cada passo é o que caracteriza uma Progressão Aritmética

Pra ficar mais nítido, vamos nomear as linhas:



Nomeando as linhas, vemos que **a_1** é igual a **uma bolinha**. Quando passamos para a segunda linha, vemos que **a_2** é **igual a duas bolinhas**.
Mas agora precisamos saber qual é o incremento que caracteriza essa sequência. Mas como podemos fazer isso?
Vamos observar se a gente subtrai de uma linha o valor da linha que tá em cima, saberemos exatamente quanto foi o incremento de uma linha pra outra. Não importa quais linhas você vai pegar, o importante é que seja uma seguida da outra, ou seja, consecutivas.

Por exemplo:
- $a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$, e isso é igual a :
- $a_4 - a_3 = 4 - 3 = 1$

Esse incremento que tanto falamos é chamado de **razão da P.A. (progressão aritmética)**

Vendo toda essa sequência, conseguimos identificar tudo o que caracteriza uma progressão, lembra?

- Um termo inicial : $a_1 = 1$
- A razão da P.A. : $a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$

Sabendo disso, vamos tentar deduzir uma fórmula para um caso geral, para qualquer valor inicial e razão.

Por exemplo, para saber qual ser o valor da segunda linha, o que devemos fazer?

Podemos pegar o termo inicial a_1 e somamos a razão da P.A.

$a_2 = a_1 + r$, sendo que r é a razão da P.A.

então:

$$a_2 = 1 + 1$$
$$a_2 = 2$$

Agora para sabermos qual vai ser o terceiro termo da nossa P.A., seguiremos o mesmo raciocínio. Será igual a nossa descrição de Progressão aritmética, Vai ser a soma do termo anterior (que nesse caso é a segunda linha) e da razão da P.A.

$$a_3 = a_2 + r$$

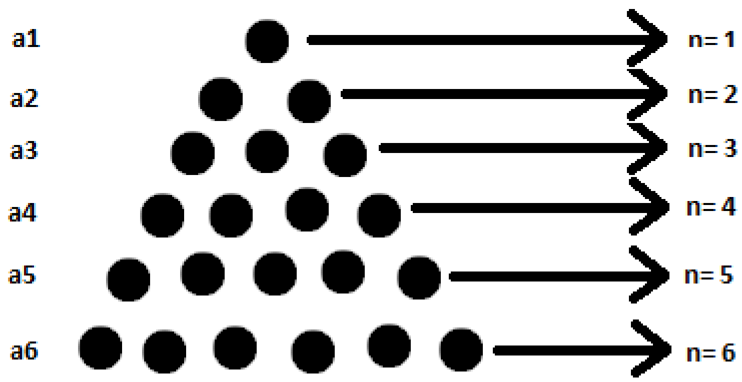
mas sabemos que:

$$a_2 = a_1 + r$$

Então substituindo, temos:

$$a_3 = (a_1 + r) + r$$
$$a_3 = a_1 + 2r$$

E isso acontece sucessivamente para os termos seguintes.



Perceba que o índice 3 em a_3 é o número em relação ao termo que queremos saber. Observe também que o número que está multiplicando a razão sempre será o número que indica o termo da p.a. menos 1.

Sabendo disso, conseguimos deduzir a fórmula geral de uma Progressão aritmética;

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, r,$$

onde:
a_n = Valor do termo de posição n da progressão aritmética;
a_1 = Valor do primeiro termo da progressão aritmética;
n = Posição do termo da progressão aritmética;
r = Razão da progressão aritmética;

Vamos fazer um exemplo?

Para uma progressão aritmética, com o termo inicial igual a 6 e razão igual a 9, qual será o valor do 5º termo dessa P.A.?

Vamo lá! Primeiro vamos identificar quais valores o exercício nos dá. Então vamos reler.

*“Para uma progressão aritmética, com o **termo inicial igual a 6** e razão igual a 9, qual será o valor do 5º termo dessa P.A.?”*

Opa! Termo inicial igual a 6, é a mesma coisa que $\mathbf{a_1 = 6}$

Agora, vamos ler, de novo pra achar mais coisas

*“Para uma progressão aritmética, com o termo inicial igual a 6 e **razão igual a 9**, qual será o valor do 5º termo dessa P.A.?”*

Achamos outro valor, né? A razão é igual a 9, então **r = 9**

Mas qual é a pergunta mesmo ? Vamos voltar na questão para saber.

*“Para uma progressão aritmética, com o termo inicial igual a 6 e razão igual a 9, qual será o **valor do 5º termo dessa P.A**.?”*

O exercício pede o valor do 5º termo dessa progressão aritmética, $\mathbf{a_5 = ?}$

Agora, vamos montar nosso exercício com todas as informações que retiramos do texto

$$a_n = a_1 + (n - 1)\ r,$$

como n = 5, temos:

$$a_5 = a_1 + (5 - 1)\ r,$$

Substituindo os valores:

$$a_5 = 6 + (5 - 1).\ 9$$
$$a_5 = 6 + 4\ .\ 9$$
$$a_5 = 6 + 36$$
$$a_5 = 42$$

Portanto, o valor do quinto termo dessa P.A. é igual a 42

Progressão Geométrica (P.G.)

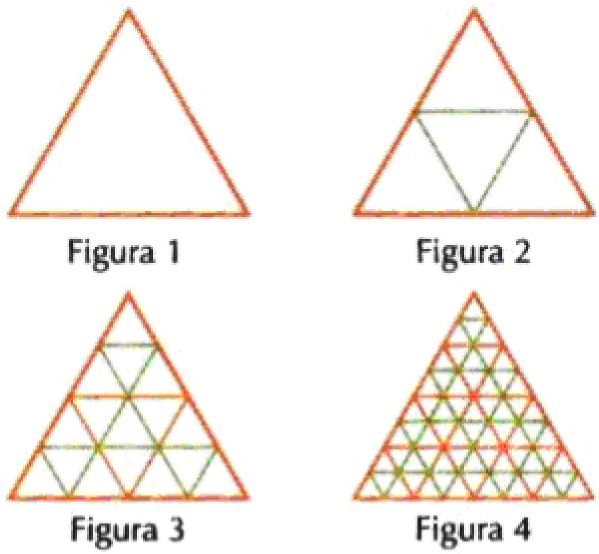
A ideia de progressão geométrica é bastante parecida com a de progressão aritmética: a partir de um termo inicial, de acordo com algum padrão, obtemos os termos seguintes. A diferença entre elas é a forma de se obter a sequência:

Na **progressão aritmética (P.A.)**, podemos construir a sequência fazendo **adições** de uma constante (a razão), ou podemos verificar se uma sequência é uma P.A. fazendo **subtrações**).

Na **progressão geométrica (P.G.)** nós podemos construir a sequência realizando **multiplicações** por uma constante (também chamada razão), ou verificar se uma sequência é uma **P.G.** realizando **divisões**).

Vejamos então um exemplo de **progressão geométrica (P.G.)**.

Quando pensamos no nome “geométrica”, imaginamos figuras geométricas, como triângulos, então observe as figura abaixo:



Na figura 1, temos 1 triângulo.
Na figura 2, temos 4 triângulos.
Na figura 3, temos 16 triângulos.
Na figura 4, temos 64 triângulos.

Como fizemos com a progressão aritmética, vamos chamar a quantidade triângulos em cada figura por a, então temos:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 4$$
$$a_3 = 16$$
$$a4 = 64$$

Podemos observar que:

$$a_2 / a_1 = 4/1 = 4$$
$$a_3 / a_2 = 16/4 = 4$$
$$a_4 / a_3 = 64/4 = 4$$

Ou de outra forma:

$$a_2 = a_1 \cdot 4, \text{ pois } 4 = 1 \cdot 4$$
$$a_3 = a_2 \cdot 4, \text{ pois } 16 = 4 \cdot 4$$
$$a_4 = a_3 \cdot 4, \text{ pois } 64 = 16 \cdot 4$$

Então a quantidade de triângulos nessa sequência é uma **progressão geométrica** de **termo inicial $a_1 = 1$** e razão **$q = 4$**.

Usando esse raciocínio, podemos calcular quantos triângulos existiriam numa figura 5, caso essa lógica se mantivesse:

$$a5 = a_4 \cdot 4 \text{ então } a5 = 64 \cdot 4 = 256$$

A progressão aritmética seria a sequência de todos os números, iniciando em 1, e seguindo esse padrão, ou seja:

1, 4, 16, 64, 256, 1024, …

Agora se quiséssemos descobrir, por exemplo, a quantidade de triângulos da 20º figura?

Podemos perceber, que a partir do **primeiro termo**, multiplicamos **uma** vez o por **4**, e obtemos o segundo termo. ($a_2 = 1 \cdot 4$)

Para chegar no 16, multiplicamos o **primeiro termo duas** vezes por **4**. ($a_3 = 1 \cdot 4 \cdot 4 = 1 \cdot 4^2$)

Para chegar no 64, multiplicamos o **primeiro termo três** vezes por **4**. ($a_4 = 1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1 \cdot 4^3$)

Se quisermos o 20º termo, basta multiplicar o **primeiro termo**, que é 1, por **20 - 1** vezes, ou seja, 19 vezes por **4.**

Então $a_{20} = 1 \cdot 4^{19}$

(Atenção, apesar dos exemplos, as progressões geométrica e aritmética não precisam envolver figuras, elas são uma sequências de números)

Para qualquer PG

Para calcular num caso qualquer, usamos a seguinte expressão:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

onde:

a_n: termo de posição n da progressão aritmética;

a_1: primeiro termo da progressão aritmética;
n: posição do termo da progressão aritmética;
q: razão da progressão geométrica;

Agora, sabendo como cada uma funciona, vamos voltar na teoria de Malthus.
Ele disse que a população cresce como uma progressão geométrica enquanto a produção agrícola se comporta como uma progressão aritmética.

Se a gente estabelecer um termo inicial e razão igual

sendo $a_1 = 5$ e $r = q = 3$, teremos uma P.A. do modo

$$a_n = 5 + (n - 1).3$$

e teremos uma P.G. de forma

$$a_n = 5 . 3^{n-1}$$

Agora vamos estudar duas posições diferentes e comparar os valores de cada progressão

- Para n = 3

temos uma P.A.

$$a_3 = 5 + (3 - 1).3$$
$$a_3 = 5 + 2.3$$
$$a_3 = 5 + 6$$
$$a_3 = 11$$

e temos uma P.G

$$a_3 = 5 . 3^{3-1}$$
$$a_3 = 5 . 3^2$$
$$a_3 = 5 . 9$$
$$a_3 = 45$$

A diferença entre os valores da P.G e P.A. para n= 3

$$45-11 = 34$$

Agora, calcularemos para um n = 5

temos uma P.A.:

$$a_5 = 5 + (5 - 1).3$$
$$a_5 = 5 + 4.3$$

$$a_5 = 5 + 12$$
$$a_5 = 17$$

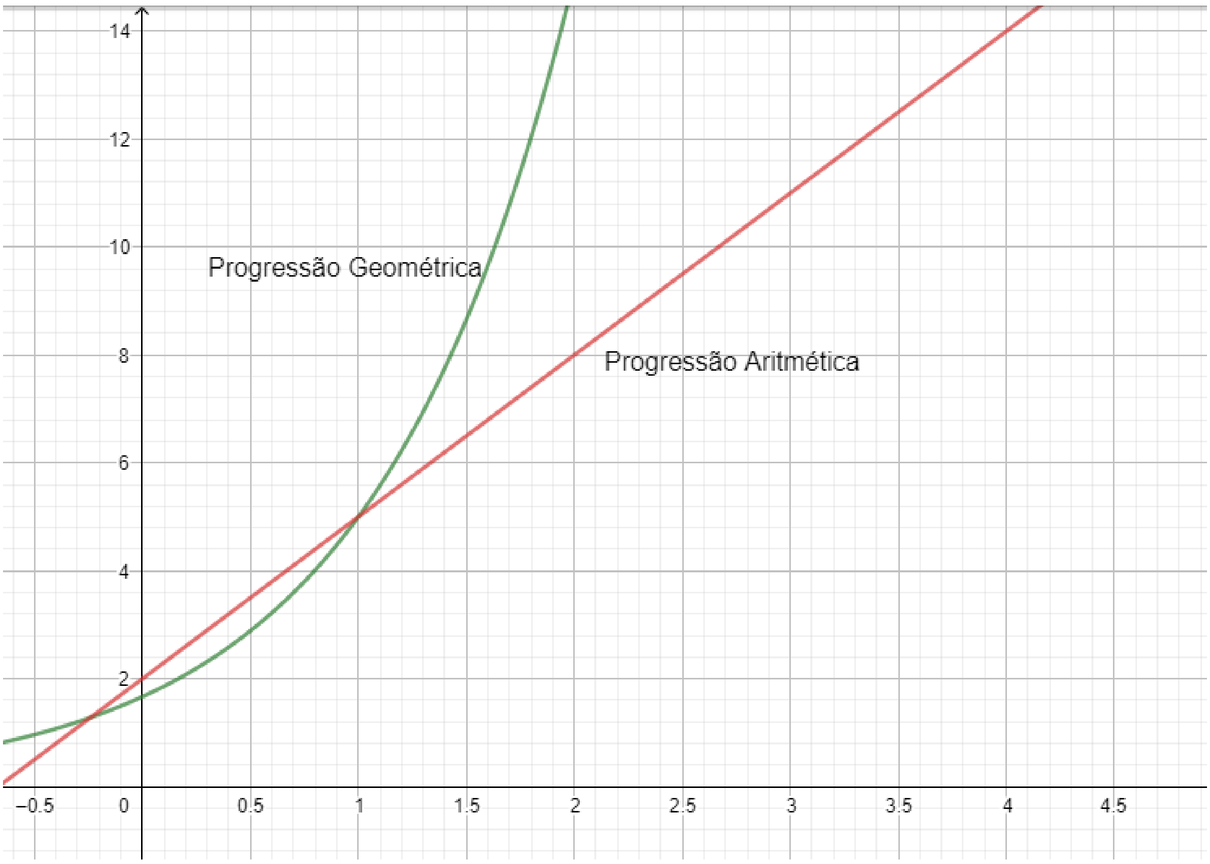
e temos uma P.G:

$$a_5 = 5 \cdot 3^{5-1}$$
$$a_5 = 5 \cdot 3^4$$
$$a_5 = 5 \cdot 81$$
$$a_5 = 450$$

A diferença entre a P.G. e a P.A. para n = 5 é

$$450 - 17 = 433$$

Perceba que o quanto maior é o termo das progressões maior vai ser a diferença entre eles, igual no gráfico que já apresentamos e o gráfico abaixo



Sugestão de vídeos
Progressão aritmética: https://youtu.be/zoFC82aPq1A
Progressão geométrica: https://youtu.be/JxOhaVTkQR4

Questões

1. (ENEM-Modificada) As projeções para a produção de arroz no período de 2012-2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	Projeto da Produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

Qual é a projeção da produção para o ano de 2020 ?

a)62,50 b) 52,75 c) 80,75 d) 60,25 e) 72,50

2.Sob a orientação de um mestre de obras, João e Pedro trabalharam na reforma de um edifício. João efetuou reparos na parte hidráulica nos andares 1, 3, 5, 7, e assim sucessivamente, de dois em dois andares. Pedro trabalhou na parte elétrica nos andares 1, 4, 7, 10, e assim sucessivamente, de três em três andares. Coincidentemente, terminaram seus trabalhos no último andar. Na conclusão da reforma, o mestre de obras informou, em seu relatório, o número de andares do edifício. Sabe-se que, ao longo da execução da obra, em exatamente 20 andares, foram realizados reparos nas partes hidráulica e elétrica por João e Pedro.

Qual é o número de andares desse edifício?

a) 40 b) 60 c) 100 d) 115 e) 120

3. Considerando a PA de razão 2 e primeiro termo igual a 2, e a PG que possui mesma razão e mesmo primeiro termo, qual a diferença entre o décimo termo da PG e o décimo termo da PA?

a) 20 b) 1028 c) 1208 d) 1228 e) 1004

4. (ENEM) Alguns modelos de rádios automotivos estão protegidos por um código de segurança. Para ativar o sistema de áudio, deve-se digitar o código secreto composto por quatro algarismos. No primeiro caso de erro na digitação, a pessoa deve esperar 60 segundos para digitar o código novamente. O tempo de espera duplica, em relação ao tempo de espera anterior, a cada digitação errada. Uma pessoa conseguiu ativar o rádio somente na quarta tentativa, sendo de 30 segundos o tempo gasto para digitação do código secreto a cada tentativa. Nos casos da digitação incorreta, ela iniciou a nova tentativa imediatamente após a liberação do sistema de espera.

O tempo total, em segundo, gasto por essa pessoa para ativar o rádio foi igual a

a) 300 b) 420 c) 540 d) 660 e) 1020